الموضوع الثالث:

التمرين الأول:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 2$ وأساسها $r = 4$.

1) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n.

2) أحسب الحد السابع والحد الخامس والعشرين.

3) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1:

$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

4) أ- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

ب- أوجد العدد الطبيعي n بحيث:

$$S_n = 98$$

التمرين الثاني:

a، b و c أعداد صحيحة بحيث:

- باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1) عين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$a \times b \text{ و } a^2 - b^2$$

2) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$c^{2n} \equiv 1\ [7]$$

ب- تحقق أن:

$$2015 \equiv 6\ [7]$$

- استنتج باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

$$2015^{2014} \text{ و } 2015^{2015}$$

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x-1}{-x+1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين العدد الحقيقي a حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن:

$$f(x) = a + \frac{1}{-x+1}$$

2) أحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم فسر النتائج هندسيا.

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 يطلب تعيين معادلة كل منهما.

5) عين احداثيي نقط تقاطع (C) مع محوري الاحداثيات.

6) أنشئ في نفس المعلم، المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C).

تصحيح الموضوع الثالث:

التمرين الأول:

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = 2$ وأساسها $r = 4$.

1) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n:

تعطى عبارة الحد العام u_n لمتتالية حسابية حدها الأول u_1 بالعلاقة التالية:

$$u_n = u_1 + r(n-1)$$

بالتعويض: $u_n = 2 + 4(n-1)$

أي: $u_n = 2 + 4n - 4$

ومنه نجد:

$$u_n = 4n - 2 = 2(2n-1)$$

2) نحسب الحد السابع والحد الخامس والعشرين:

بما أن الحد الأول هو u_1 فإن:

- الحد السابع هو u_7.
- الحد الخامس والعشرين هو u_{25}.

- نحسب الحد السابع:

لدينا: $u_7 = 4 \times 7 - 2$

ومنه نجد:

$$u_7 = 26$$

- نحسب الحد الخامس والعشرون:

لدينا: $u_{25} = 4 \times 25 - 2$

ومنه نجد:

$$u_{25} = 98$$

3) نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1:

$$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$$

لدينا: $u_{n-1} + u_{n+1} = 4(n-1) - 2 + 4(n+1) - 2$

أي $u_{n-1} + u_{n+1} = 4n - 4 - 2 + 4n + 4 - 2$

بالاختزال: $u_{n-1} + u_{n+1} = 8n - 4$

ونكتب: $u_{n-1} + u_{n+1} = 2(4n-2)$

حيث: $u_n = 4n - 2$

ومنه نجد:

$$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$$

4) أ- نحسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

تعطى عبارة مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية بالعلاقة التالية:

$$S_n = \frac{(\text{عدد الحدود})(\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع})}{2}$$

وعدد الحدود يحسب بالعلاقة التالية:

عدد الحدود = دليل الحد الأخير في المجموع − دليل الحد الأول في المجموع + 1

حيث:

- الحد الأول في المجموع هو u_1.
- الحد الأخير في المجموع هو u_n.
- عدد الحدود هو n.

بالتعويض ينتج: $S_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$

أي: $S_n = \frac{n(2+4n-2)}{2}$

ومنه نجد:

$$S_n = 2n^2$$

ب- نبحث عن العدد الطبيعي n بحيث:

$$S_n = 98$$

نحل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $S_n = 98$

أي: $2n^2 = 98$

ومنه: $n^2 = 49$

فنجد: $n = -7$ أو $n = 7$

بما أن n عدد طبيعي فإن:

$$n = 7$$

التمرين الثاني:

a، b و c **أعداد صحيحة بحيث:**

- باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 هو 3.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد b على 7 هو 4.
- باقي القسمة الإقليدية للعدد c على 7 هو 6.

1) **نعين باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:**

$a \times b$ و $a^2 - b^2$

● **نعين باقي قسمة العدد $a \times b$ على 7:**

لدينا: $a \equiv 3\ [7] \ldots (1)$

ولدينا: $b \equiv 4\ [7] \ldots (2)$

بضرب (1) في (2) نجد: $a \times b \equiv 12\ [7]$

وبما أن: $12 \equiv 5\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a \times b \equiv 5\ [7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a \times b$ على 7 هو 5.

● **نعين باقي قسمة العدد $a^2 - b^2$ على 7:**

لدينا: $a \equiv 3\ [7]$

حسب خواص الموافقات: $a^2 \equiv 3^2\ [7]$

وبما أن: $3^2 \equiv 2\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $a^2 \equiv 2\ [7] \ldots (3)$

ولدينا: $b \equiv 4\ [7]$

حسب خواص الموافقات: $b^2 \equiv 4^2\ [7]$

وبما أن: $4^2 \equiv 2\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $b^2 \equiv 2\ [7] \ldots (4)$

بطرح (4) من (3) طرف لطرف نجد: $a^2 - b^2 \equiv 0\ [7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية للعدد $a^2 - b^2$ على 7 هو 0.

2) **أ- نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n:**

$$c^{2n} \equiv 1\ [7]$$

لدينا: $c \equiv 6\ [7]$

وبما أن: $6 \equiv -1\ [7]$

فإن (حسب خاصية التعدي): $c \equiv -1\ [7]$

حسب خواص الموافقات: $c^{2n} \equiv (-1)^{2n}\ [7]$

بما أن $2n$ عدد زوجي فإن: $(-1)^{2n} = 1$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$c^{2n} \equiv 1\ [7]$$

ب- نتحقق أن:

$$2015 \equiv 6\ [7]$$

لدينا: $2016 \equiv 0\ [7]$

ونكتب أيضا: $2016 \equiv 7\ [7]$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة: $2016 - 1 \equiv 7 - 1\ [7]$

ومنه نجد:

$$2015 \equiv 6\ [7]$$

- استنتاج باقي القسمة الإقليدية على 7 لكل من العددين:

2015^{2014} و 2015^{2015}

لدينا: $2016 \equiv 0\ [7]$

نضيف العدد (-1) لطرفي الموافقة: $2016 - 1 \equiv 0 - 1\ [7]$

ومنه نجد: $2015 \equiv -1\ [7]$

حسب خواص الموافقات فإن:

$$\begin{cases} 2015^{2014} \equiv (-1)^{2014}\ [7] \\ 2015^{2015} \equiv (-1)^{2015}\ [7] \end{cases}$$

بما أن 2014 عدد زوجي فإن: $(-1)^{2014} \equiv 1\ [7]$

وبما أن 2015 عدد فردي فإن: $(-1)^{2015} \equiv -1\ [7]$

أي: $(-1)^{2015} \equiv 6\ [7]$

إذن يمكن أن نكتب:

$$\begin{cases} 2015^{2014} \equiv 1\ [7] \\ 2015^{2015} \equiv 6\ [7] \end{cases}$$

وبالتالي:

- باقي قسمة العدد 2015^{2014} على 7 هو 1.
- باقي قسمة العدد 2015^{2015} على 7 هو 6.

التمرين الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{2x-1}{-x+1}$$

وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) **نعين العدد الحقيقي a حيث من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن:**

$$f(x) = a + \frac{1}{-x+1}$$

لدينا: $f(x) = a + \frac{1}{-x+1}$

بتوحيد المقامات ينتج: $f(x) = \frac{a(-x+1)+1}{-x+1}$

بعد النشر والترتيب نجد: $f(x) = \frac{-ax+(a+1)}{-x+1}$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} -a = 2 \\ \text{و} \\ a+1 = -1 \end{cases}$$

ومنه:

$$a = -2$$

وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن:

$$f(x) = -2 + \frac{1}{-x+1}$$

2) **نحسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم نفسر النتائج هندسيا:**

● **نحسب النهايات عند $-\infty$ و $+\infty$:**

- لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$

حيث: $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right) = 0$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$$

- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$

حيث: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right) = 0$

ومنه نجد:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$$

<u>التفسير الهندسي:</u>

المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل معادلته:

$$y = -2$$

● **نحسب النهايات عند 1:**

- لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$

حيث: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} (-x+1) = 0^+$

فينتج: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ <}} \left(\frac{1}{-x+1}\right) = +\infty$

ومنه نجد:

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f(x) = +\infty$$

- لدينا: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \left(-2 + \frac{1}{-x+1}\right)$

حيث: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} (-x+1) = 0^-$

فينتج: $\lim\limits_{\substack{x\to1 \\ >}} \left(\frac{1}{-x+1}\right) = -\infty$

ومنه نجد:

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

<u>التفسير الهندسي:</u>

المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب معادلته:

$$x = 1$$

3) **ندرس تغيرات الدالة f ثم نشكل جدول تغيراتها:**

● **ندرس تغيرات الدالة f:**

- الدالة المشتقة للدالة f هي:

$$f'(x) = \frac{1}{(-x+1)^2}$$

- دراسة إشارة $f'(x)$:

من أجل كل x من المجال $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ لدينا:

$$f'(x) > 0$$

لأن:

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ (-x+1)^2 > 0\,, x \in]-\infty : 1[\cup]1\,;+\infty[\end{cases}$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

● **نشكل جدول تغيرات الدالة f:**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-2

4) **نبين أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 ونعين معادلة كل منهما:**

● **نبين أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1:**

تعرف معادلة المماس بالعلاقة التالية:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

ونكتب أيضا:

$$y = f'(x_0).x + [f(x_0) - x_0.f(x_0)]$$

<u>حيث:</u>

$f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس.

نقول أن المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 إذا كان للمعادلة $f'(x_0) = 1$ حلان متمايزان x_0 و x'_0.

نحل في $\mathbb{R} - \{1\}$ المعادلة: $f'(x_0) = 1$

أي: $\frac{1}{(-x_0+1)^2} = 1$

بعد النشر والترتيب ينتج: $x_0(x_0 - 2) = 0$

ومنه نجد:

$$x_0 = 0 \text{ أو } x'_0 = 2$$

وبالتالي المنحنى (C) يقبل مماسين (Δ) و (Δ') معامل توجيههما يساوي 1 عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 2 على الترتيب.

● **تعيين معادلة كل من (Δ) و (Δ'):**

لدينا:

$$\begin{cases} (\Delta) : y = f'(0)(x-0) + f(0) \\ (\Delta') : y = f'(2)(x-2) + f(2) \end{cases}$$

حيث:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f(0) = -1 \\ f'(2) = 1 \\ f(2) = -3 \end{cases}$$

ومنه نجد:

$$\begin{cases} (\Delta) : y = x - 1 \\ (\Delta') : y = x - 5 \end{cases}$$

5) **نعين احداثيي نقط تقاطع (C) مع محوري الاحداثيات:**

- **مع محور الفواصل:**

نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل هي مجموعة حلول المعادلة:

$$f(x) = 0$$

نحل في $\mathbb{R} - \{1\}$ المعادلة: $f(x) = 0$

أي: $\frac{2x-1}{-x+1} = 0$

ومنه نجد: $x = \frac{1}{2}$

إذن (C) يقطع محور الفواصل في النقطة:

$$A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$$

- **مع محور التراتيب:**

نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور التراتيب هي مجموعة حلول المعادلة:

$$y = f(0)$$

لدينا: $f(0) = -1$

إذن (C) يقطع محور التراتيب في النقطة:

$$B(0 ; -1)$$

6) **ننشئ في نفس المعلم، المماسين (Δ) و (Δ') والمنحنى (C):**

- **لرسم المماس (Δ) يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:**

$$(\Delta) : y = x - 1$$

x	1	0
y	0	-1

فيصبح المماس (Δ) معرف بالنقطتين $(1 ; 0)$ و $(0 ; -1)$.

- **لرسم المماس (Δ') يكفي تعيين نقطتين اعتبارا من المعادلة:**

$$(\Delta') : y = x - 5$$

x	5	0
y	0	-5

فيصبح المماس (Δ') معرف بالنقطتين $(5 ; 0)$ و $(0 ; -5)$.

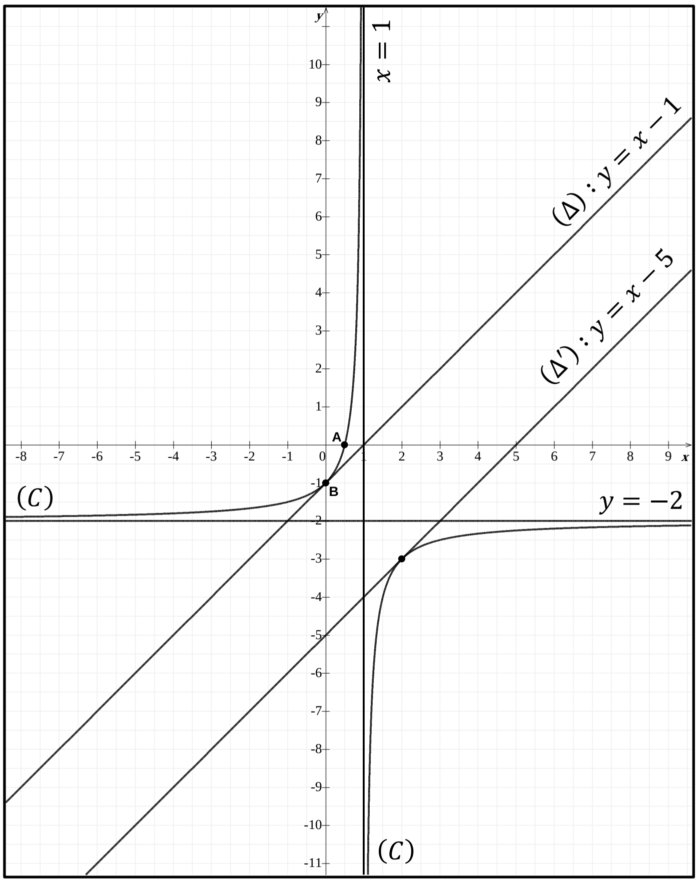
- **لرسم المنحنى (C) نأخذ بعين الاعتبار ما يلي:**

- المستقيمات المقاربة للمنحى (C):

$$x = 1$$
$$y = -2$$

- نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل: $A\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$.

- نقطة تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور التراتيب: $B(0 ; -1)$.



المنحنى الممثل للدالة f

حظ سعيد

05 56 24 69 06
bouguetof.hamid@yahoo.fr